

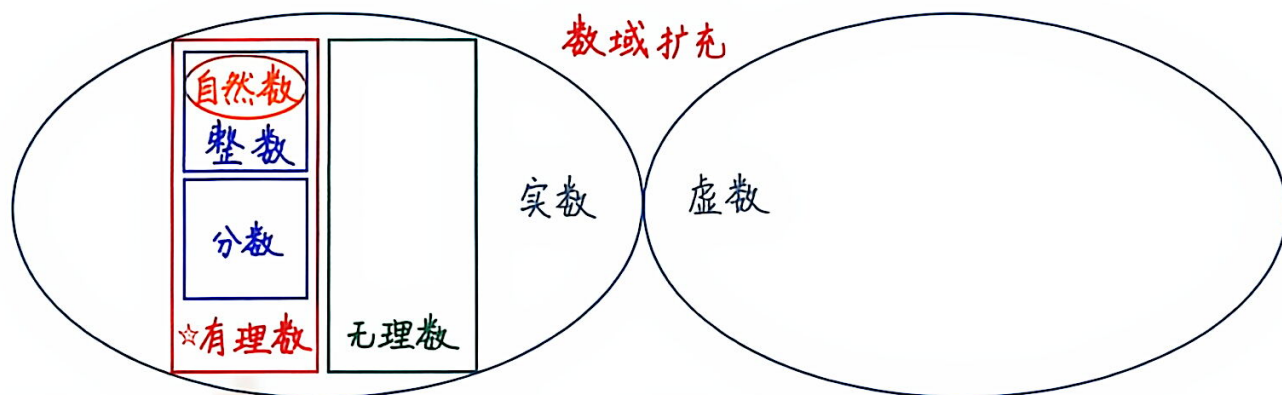
第一章 有理数

六年级



1.1 数域扩充——有理数

我的笔记



1. 有理数的定义: 可以写成 $\frac{p}{q}$ 形式的数. (p, q 为整数)

整数、分数、有限小数、无限循环小数是有理数, 无限不循环小数不是有理数.

2. 有理数的分类:

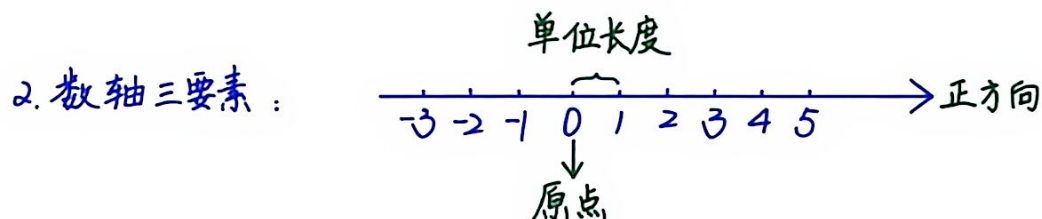
正整数	正分数	正有理数	} 非负有理数
0		0	
负整数	负分数	负有理数	} 非正有理数
整数	分数		



1.2 数轴的概念

我的笔记

1. 定义：规定了原点、正方向和单位长度的直线叫做数轴。

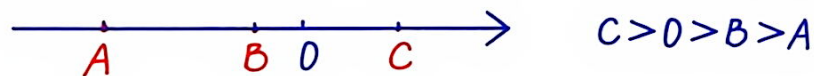


3. 数轴上的点：有理数+无理数（数轴上的点与实数一一对应）。

例 在数轴上分别画出点 $A=1\frac{2}{3}$ ，点 $B=0.75$ ，点 $C=\frac{11}{5}$ 。



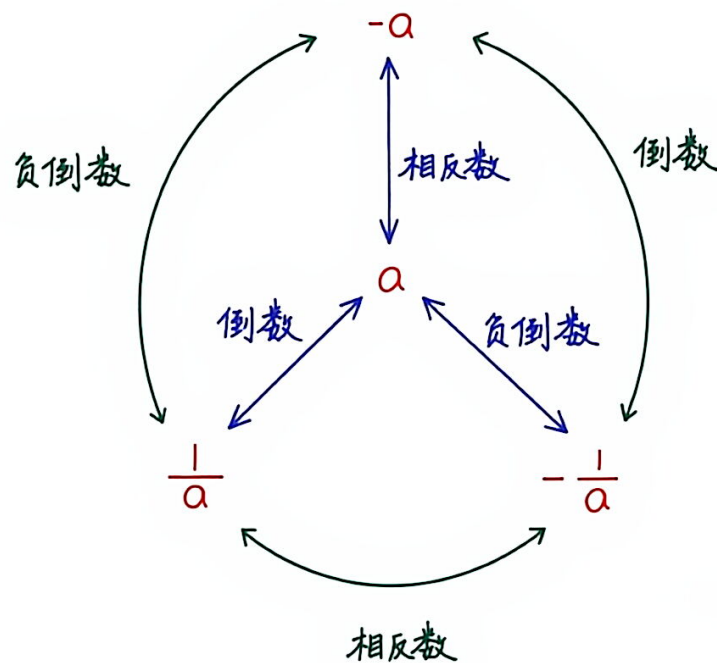
4. 数轴上右侧的数大于左侧的数。



1.3 相反数，倒数，负倒数



我的笔记



① A, B 互为相反数. $A+B=0$.

则 $a+(-a)=0$ $\frac{1}{a}+(-\frac{1}{a})=0$

例 $2+(-2)=0$ $\frac{1}{2}+(-\frac{1}{2})=0$

② A, B 互为倒数. $AB=1$.

则 $a \times \frac{1}{a} = 1$ $-a \times (-\frac{1}{a}) = 1$

例 $2 \times \frac{1}{2} = 1$ $-2 \times (-\frac{1}{2}) = 1$

③ A, B 互为负倒数. $AB=-1$.

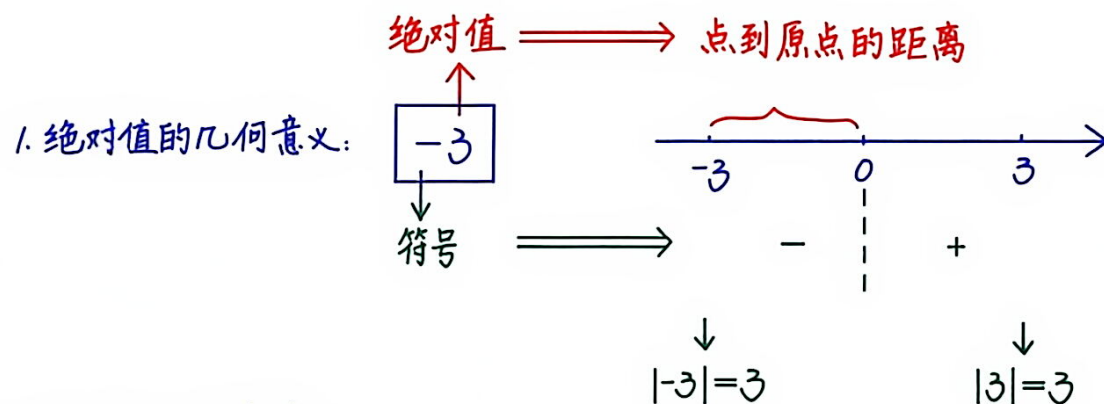
则 $a \times (-\frac{1}{a}) = -1$ $-a \times \frac{1}{a} = -1$

例 $2 \times (-\frac{1}{2}) = -1$ $-2 \times \frac{1}{2} = -1$



1.4 绝对值的含义

我的笔记



2. 绝对值的代数意义:

正数的绝对值等于它本身.
0 的绝对值等于 0.
负数的绝对值等于它的相反数.

$$|a| = \begin{cases} a & (a > 0) \\ 0 & (a = 0) \\ -a & (a < 0) \end{cases} \Longrightarrow |a| = \begin{cases} a & (a \geq 0) \\ -a & (a \leq 0) \end{cases}$$

1.5 绝对值的性质



我的笔记

1. $|a| \geq 0$

初中数学
非负三宝: $\begin{cases} |a| \geq 0 \\ a^2 \geq 0 \\ \sqrt{a} \geq 0 \end{cases}$

例 $|x+2| + (y-3)^2 + \sqrt{z-5} = 0$.

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \geq 0 & \geq 0 & \geq 0 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ = 0 & = 0 & = 0 \end{array}$$

$$\begin{cases} x+2=0, \\ y-3=0, \\ z-5=0. \end{cases}$$

2. $|a| \geq a$

常用结论:

① $|a| - a \geq 0$

② 当 $|a| - a > 0$ 时, $a < 0$

③ 当 $|a| - a = 0$ 时, $a \geq 0$

例 $(|x| - x)(x + 1) > 0$.

$$\begin{array}{ccc} \underbrace{\geq 0} & & \underbrace{> 0} \\ \downarrow & \nearrow & \downarrow \\ > 0 & & x > -1 \\ \downarrow & & \\ x < 0 & & \\ \Rightarrow -1 < x < 0. & & \end{array}$$

3. $\frac{|a|}{a} = \frac{a}{|a|} = \begin{cases} 1 & (a > 0) \\ -1 & (a < 0) \end{cases}$

例 已知 x 与 y 互为相反数, 求 $\frac{|x|}{x} + \frac{|y|}{y} = ?$.

$\downarrow$
 $\therefore x + y = 0$ (-正-负)

$\therefore$ 原式 $= 1 + (-1) = 0$.



1.6 绝对值化简——判断正负

我的笔记

步骤: step1: 判断 $|A|$ 内部 A 的正负性.

step2: “ $|$ ”化“ $()$ ”.

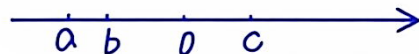
$$\begin{cases} A \geq 0 \text{ 时, } |A| = (A) \longrightarrow \text{例 当 } x \geq 3 \text{ 时, } |x-3| = (x-3) = x-3 \\ A < 0 \text{ 时, } |A| = -(A) \longrightarrow \text{例 当 } x < 3 \text{ 时, } |x-3| = -(x-3) = -x+3 \end{cases}$$

step3: 去括号化简.

例 实数 a, b, c 在数轴上的对应点如图, 化简 $|a| + |c-b| - |a+b| + |a-c|$.

解: $\because a < 0; c-b > 0; a+b < 0; a-c < 0$

$$\begin{aligned} \therefore \text{原式} &= (-a) + (c-b) - (-a-b) + (-a+c) \\ &= -a + 2c. \end{aligned}$$



1.7 绝对值化简——零点分段法



我的笔记

步骤:

例 化简: $|x-2|+|x+3|$.

step1: 取零点 (使绝对值内为0的 x 取值) $\longrightarrow$ 解: 零点: $x=2, x=-3$.

step2: 分区间 (数轴分段) $\longrightarrow$



step3: 分类讨论 (每段分别去绝对值) $\longrightarrow$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{① 当 } x \leq -3 \text{ 时, 原式} = (-x+2)+(-x-3) = -2x-1 \\ \text{② 当 } -3 < x < 2 \text{ 时, 原式} = (-x+2)+(x+3) = 5, \\ \text{③ 当 } x > 2 \text{ 时, 原式} = (x-2)+(x+3) = 2x+1. \end{array} \right.$$

step4: 总结答案 (综上所述) $\longrightarrow$

$$\text{综上所述: 原式} = \begin{cases} -2x-1 & (x \leq -3), \\ 5 & (-3 < x < 2), \\ 2x+1 & (x > 2). \end{cases}$$



1.8 绝对值的几何意义

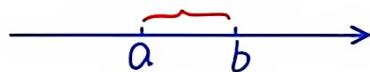
我的笔记

1. 定义:

两数差的绝对值=两点间距离.

$|a-b|=|b-a|$ 表示数轴上点 a 到点 b 之间的距离.

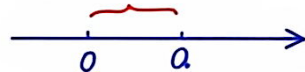
$$|a-b|=|b-a|$$



2. 变形:

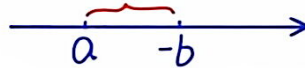
$|a|=|a-0|$ 表示数轴上点 a 到原点的距离.

$$|a-0|=|0-a|$$

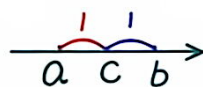
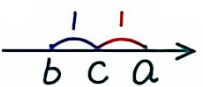


$|a+b|=|a-(-b)|$ 表示数轴上点 a 到点 $(-b)$ 之间的距离.

$$|a-(-b)|=|(-b)-a|$$



3. 例 已知 a, b, c 互不相等, $|a-c|=|c-b|=1$, 求 $|a-b|$ 的值. 思路: 在数轴上表示大小关系.

解: ① 当 $a < c$ 时:  ② 当 $a > c$ 时:  $\therefore |a-b|=2$.

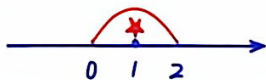
1.9 最值问题——绝对值之和基础



我的笔记

已知 a 为实数,求 $|a|+|a-1|+|a-2|$ 的最小值.

数轴上点 a 与原点,点1,点2的距离之和



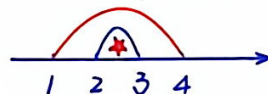
当 $0 \leq a \leq 2$ 时, $|a|+|a-2|$ 的最小值为 $2-0=2$.

当 $a=1$ 时, $|a-1|$ 的最小值为0.

$\therefore$ 当 $a=1$ 时,原式的最小值为 $2+0=2$.

已知 a 为实数,求 $|a-1|+|a-2|+|a-3|+|a-4|$ 的最小值.

数轴上点 a 与点1,点2,点3,点4的距离之和



当 $1 \leq a \leq 4$ 时, $|a-1|+|a-4|$ 的最小值为 $4-1=3$.

当 $2 \leq a \leq 3$ 时, $|a-2|+|a-3|$ 的最小值为 $3-2=1$.

$\therefore$ 当 $2 \leq a \leq 3$ 时,原式的最小值为 $3+1=4$.

结论 ① 奇数个零点: 取中间点 (零点: 使绝对值内为0的 x 取值)

若 $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \dots \leq a_{2n+1}$, 则 $x=a_{n+1}$ 时, $|x-a_1|+|x-a_2|+|x-a_3|+\dots+|x-a_{2n+1}|$ 取最小值.

② 偶数个零点: 取中间段 $\rightarrow$ "="可取: 最小值一定可在零点处取得.

若 $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \dots \leq a_{2n}$, 则 $a_n \leq x \leq a_{n+1}$ 时, $|x-a_1|+|x-a_2|+|x-a_3|+\dots+|x-a_{2n}|$ 取最小值.



1.10 最值问题——绝对值之和变形

我的笔记

求绝对值之和的最小值

基本思路：寻找中间零点。

例 $|x| + |x-1| + |x-2|$

零点 $x=0, 1, 2$
★

当 $x=1$ 时，取最小值。

变形一：多个零点相同。

例 $2|x| + |x-1| + 3|x-2|$

$$= |x| + |x| + |x-1| + |x-2| + |x-2| + |x-2|$$

零点 $x=0, 0, 1, 2, 2, 2$
★

当 $1 \leq x \leq 2$ 时，取最小值。

变形二： x 的系数不为 1。

例 $|2x| + |x-1| + |3x-6|$

$$= 2|x| + |x-1| + 3|x-2|$$

$$= |x| + |x| + |x-1| + |x-2| + |x-2| + |x-2|$$

零点 $x=0, 0, 1, 2, 2, 2$
★

当 $1 \leq x \leq 2$ 时，取最小值。

结论 ① 多个零点相同。

$$a_1|x-b_1| + a_2|x-b_2| + a_3|x-b_3| + \dots + a_n|x-b_n| \quad \text{零点个数: } a_1+a_2+a_3+\dots+a_n, \text{再寻找中间零点.}$$

② x 的系数不为 1。

$$|a_1x-b_1| + |a_2x-b_2| + |a_3x-b_3| + \dots + |a_nx-b_n| = a_1|x-\frac{b_1}{a_1}| + a_2|x-\frac{b_2}{a_2}| + a_3|x-\frac{b_3}{a_3}| + \dots + a_n|x-\frac{b_n}{a_n}|.$$

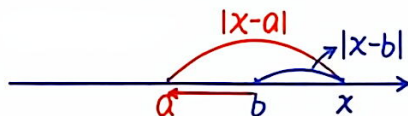
1.11 最值问题——绝对值之差



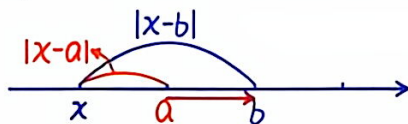
我的笔记

研究 $|x-a|-|x-b|$ 的最值. 数轴上点 x 与点 a , 点 b 的距离之差.

若 $a \leq b$

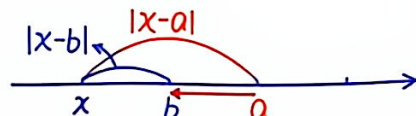


$x \geq b$ 时, 得最大值. $|x-a|-|x-b|=b-a$

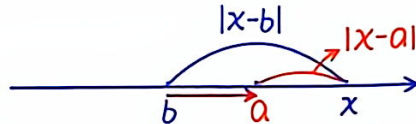


$x \leq a$ 时, 得最小值. $|x-a|-|x-b|=a-b$

若 $a \geq b$



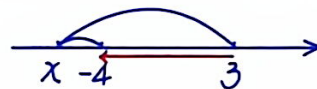
$x \leq b$ 时, 得最大值. $|x-a|-|x-b|=a-b$



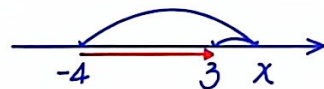
$x \geq a$ 时, 得最小值. $|x-a|-|x-b|=b-a$

例 求 $|x-3|-|x+4|$ 的最大值与最小值分别是多少? 并分别指出 x 的取值范围.

解: 零点: $x=-4$; $x=3$.



$x \leq -4$ 时, 最大值 $|x-3|-|x+4|=7$; $x \geq 3$ 时, 最小值 $|x-3|-|x+4|=-7$.





1.12 有理数的加减运算

我的笔记

1. 有理数加法运算两步曲：

例	step1: 判断符号	step2: 计算绝对值	答案
$2022 + 2025$	$\boxed{\text{正}(+)}$ 加 $\boxed{\text{正}(+)}$ 得 $\boxed{\text{正}(+)}$	$2022+2025=4047$ 相加	4047
$(-2022)+(-2025)$	$\boxed{\text{负}(-)}$ 加 $\boxed{\text{负}(-)}$ 得 $\boxed{\text{负}(-)}$	$2022+2025=4047$ 相加	-4047
$(-2022)+2025$	$\boxed{\text{正}(+)}$ 大 加 $\boxed{\text{负}(-)}$ 小 得 $\boxed{\text{正}(+)}$	$2025-2022=3$ 相减	3
$2022+(-2025)$	$\boxed{\text{正}(+)}$ 小 加 $\boxed{\text{负}(-)}$ 大 得 $\boxed{\text{负}(-)}$	$2025-2022=3$ 相减	-3
	结论: 符号同老大	结论: 同“加”异“减”	

2. 有理数减法运算转化成加法: $a-b=a+(-b)$

3. 常用运算技巧: ① 加法交换律: $a+b=b+a$

② 加法结合律: $a+b+c=a+(b+c)$

1.13 有理数的乘除运算



我的笔记

1. 有理数乘法运算两步曲：

例	step1: 判断符号	step2: 计算绝对值	答案
$a \times b$	正(+) 乘 正(+) 得 正(+)	$a \times b$	ab
$(-a) \times (-b)$	负(-) 乘 负(-) 得 正(+)	$a \times b$	ab
$(-a) \times b$	负(-) 乘 正(+) 得 负(-)	$a \times b$	$-ab$
$a \times (-b)$	正(+) 乘 负(-) 得 负(-)	$a \times b$	$-ab$

符号判断：{ 两个数相乘：同“正”异“负”，同号相乘积为正，异号相乘积为负。
 多个数相乘：奇“负”偶“正”，数一下负号个数。

2. 有理数除法运算转化成乘法： $a \div b = a \times \frac{1}{b}$ ($b \neq 0$)



1.14 有理数的乘方

我的笔记

1. 乘方的定义: 求 n 个相同有理数的积的运算叫作有理数的乘方.

记作 $\underbrace{a \times a \times a \times \cdots \times a \times a}_{n \text{ 个}}$ 读作 a 的 n 次方

a^n 指数 注: 指数为 1 时可省略.
底数 注: 负数和分数的乘方, 底数应带有括号. 例 $(-2)^3, (\frac{1}{2})^5$

区分 $-(-3)^3 = -[(-3) \times (-3) \times (-3)] = -(-27) = 27$ $-9^2 = -9 \times 9 = -81$ $(-9)^2 = (-9) \times (-9) = 81$

2. 常用结论:

① 正数的任何次方都是正数, 负数的奇数次方是负数, 负数的偶数次方是正数.

例 $(-1)^{2n+1} = -1$ 例 $(-1)^{2n} = 1$

② 1 的任何次幂都等于 1. 例 $1^n = 1$

③ 任何不为零的数的零次方为 1. 例 $n^0 = 1 (n \neq 0)$

1.15 有理数的幂运算（一）



我的笔记

幂 ← a^n
 指数
 底数 (负数或分数需加括号)

$$\underbrace{a \times a \times a \cdots \times a}_{n \text{ 个 } a \text{ 相乘}} = a^n$$

法 同底数幂相乘
则 $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
一 底数不变, 指数相加

证明 $a^m \cdot a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}_{m \text{ 个 } a \text{ 相乘}} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}_{n \text{ 个 } a \text{ 相乘}} = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}_{(m+n) \text{ 个 } a \text{ 相乘}} = a^{m+n}$

例 $2^3 \cdot 2^5 = 2^{3+5} = 2^8 = 256$

法 幂的乘方
则 $(a^m)^n = a^{mn}$
二 底数不变, 指数相乘

证明 $(a^m)^n = \underbrace{a^m \cdot a^m \cdot a^m \cdots a^m}_{n \text{ 个 } a^m \text{ 相乘}} = a^{\underbrace{m+m+\cdots+m}_{n \text{ 个 } m}} = a^{mn}$

例 $(3^2)^4 = 3^{2 \times 4} = 3^8 = 6561$

法 积的乘方
则 $(ab)^n = a^n \cdot b^n$
三 底数拆分, 指数公用

证明 $(ab)^n = \underbrace{ab \cdot ab \cdot ab \cdots ab}_{n \text{ 个 } ab \text{ 相乘}} = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}_{n \text{ 个 } a \text{ 相乘}} \cdot \underbrace{b \cdot b \cdot b \cdots b}_{n \text{ 个 } b \text{ 相乘}} = a^n \cdot b^n$

例 $(2x)^3 = 2^3 x^3 = 8x^3$



1.16 有理数的幂运算（二）

我的笔记

法则四 同底数幂相除

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \quad (a \neq 0)$$

底数不变, 指数相减

证明

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{\overbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}^{m \text{ 个 } a \text{ 相乘}}}{\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}_{n \text{ 个 } a \text{ 相乘}}} = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}_{(m-n) \text{ 个 } a \text{ 相乘}} = a^{m-n}$$

例 $\frac{3^4}{3^2} = 3^{4-2} = 3^2 = 9$

法则五 零指数幂

$$a^0 = 1 \quad (a \neq 0)$$

证明 $\frac{a^m}{a^m} = a^{m-m} = a^0 = 1$

例 $(-2)^0 = 1$

法则六 负整数指数幂

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad (a \neq 0)$$

证明 $a^{-n} = a^{0-n} = \frac{a^0}{a^n} = \frac{1}{a^n}$

例 $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$

1.17 有理数的混合运算



我的笔记

混合运算优先级：

1. 乘方 $\rightarrow$ 乘除 $\rightarrow$ 加减

2. 小括号 $\rightarrow$ 中括号 $\rightarrow$ 大括号

3. 同级运算：从左往右

例 $100 \div (-2)^2 - (-4) \times (-\frac{7}{2})$ 乘方

$$= 100 \div 4 - 4 \times \frac{7}{2} \text{ 乘除}$$
$$= 25 - 14 \text{ 加减}$$
$$= 11$$

例 $1.5 \times \{-1.8 + 3 \times [0.3 + (0.8 - 0.9) \times 2]\}$ 小括号

$$= 1.5 \times \{-1.8 + 3 \times [0.3 - 0.1 \times 2]\} \text{ 中括号}$$
$$= 1.5 \times \{-1.8 + 3 \times 0.1\} \text{ 大括号}$$
$$= 1.5 \times (-1.5)$$
$$= -2.25$$



1.18 科学记数法

我的笔记

1. 科学记数法：把一个数写成 $N=a \times 10^n$ (其中 $1 \leq |a| < 10$, n 是整数) 的形式.

$$\left\{ \begin{array}{l} |N| \geq 1 \Leftrightarrow n \geq 0 \\ |N| < 1 \Leftrightarrow n < 0 \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} 1000 \leq |N| < 10000 \Leftrightarrow n=3 \\ 100 \leq |N| < 1000 \Leftrightarrow n=2 \\ 10 \leq |N| < 100 \Leftrightarrow n=1 \\ 1 \leq |N| < 10 \Leftrightarrow n=0 \\ 0.1 \leq |N| < 1 \Leftrightarrow n=-1 \\ 0.01 \leq |N| < 0.1 \Leftrightarrow n=-2 \\ 0.001 \leq |N| < 0.01 \Leftrightarrow n=-3 \end{array} \right. \begin{array}{l} \text{例 } 1200 = 1.2 \times 10^3 \\ 120 = 1.2 \times 10^2 \\ 12 = 1.2 \times 10^1 \\ 1.2 = 1.2 \times 10^0 \\ \text{例 } 0.12 = 1.2 \times 10^{-1} \\ 0.012 = 1.2 \times 10^{-2} \\ 0.0012 = 1.2 \times 10^{-3} \end{array}$$

2. 近似数的求法：四舍五入法.

3. 有效数字：从左起第一个不为零的数字到精确数位上的所有数字.

4. 精确数位：最后一位有效数字(包括0)所处的真实数位. 例 12×10^3 2处于千位.

例	1234	1.234×10^3	1.2×10^3	1200	1.200×10^3	0.012	1.2×10^{-2}	1.20×10^{-2}
有效数字个数	四	四	二	四	四	二	二	三
精确数位	个位	个位	百位	个位	个位	千分位	千分位	万分位

1.19 等差数列与等比数列



我的笔记

等差数列

$$\begin{array}{ccccccc} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ \swarrow & \searrow & \swarrow & & \swarrow & \searrow \\ +d & +d & +d & & +d & +d \end{array}$$

1. 通项: $a_n = a_1 + (n-1)d$

2. 项数: $n = \frac{a_n - a_1}{d} + 1$

3. 求和: $S = \boxed{a_1} + \boxed{a_2} + \boxed{a_3} + \cdots + \boxed{a_n}$
 $S = \boxed{a_n} + \boxed{a_{n-1}} + \boxed{a_{n-2}} + \cdots + \boxed{a_1}$

相加: $2S = (a_1 + a_n) \cdot n$

$$\therefore S = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$$

等比数列

$$\begin{array}{ccccccc} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ \swarrow & \searrow & \swarrow & & \swarrow & \searrow \\ \times q & \times q & \times q & & \times q & \times q \end{array}$$

1. 通项: $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

2. 求和: $S = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$

$$\begin{aligned} \therefore S &= a_1 + a_1q + a_1q^2 + \cdots + a_1q^{n-2} + a_1q^{n-1} \\ qS &= a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 + \cdots + a_1q^{n-1} + a_1q^n \end{aligned}$$

相减: $qS - S = a_1q^n - a_1$

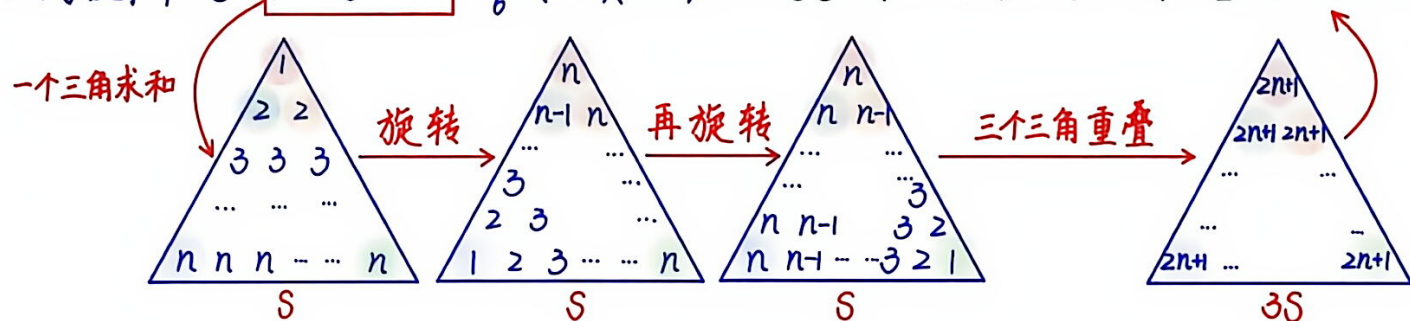
$$\therefore S = \frac{a_1q^n - a_1}{q-1} \quad (q \neq 1)$$



1.20 平方数与立方数求和

我的笔记

1. 平方数求和: $S = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) \leftarrow 3S = (2n+1) \times (1+2+3+\dots+n) = \frac{1}{2}n(n+1)(2n+1)$



2. 立方数求和: $S = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = (1+2+3+\dots+n)^2 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2 \leftarrow$

