

第二章

分数

假分数	分子 > 分母	带分数
真分数	分子 < 分母	纯分数
最简分数	分子与分母互质	既约分数
约分	分子分母同除以公因数	化简
通分	分子分母同乘以公分母	通分



2.1 分数的定义及分类

我的笔记

1. 定义: 两个正整数 a 、 b 相除, 可用分数 $\frac{b}{a}$ 表示. 分数线

分子
分母

2. 分类:

类型	书写形式	大小	举例
真分数	$\frac{b}{a} (b < a)$	< 1	$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{5}{7}$
假分数	$\frac{b}{a} (b \geq a)$	≥ 1	$\frac{3}{2}, \frac{7}{3}, \frac{4}{4}$
带分数	整数 $\leftarrow \frac{m}{1} \frac{b}{a} \rightarrow$ 真分数	> 1	$1\frac{1}{2}, 2\frac{1}{3}$

3. 假带互换: 假分数 $\longleftrightarrow$ 带分数

若 $b \div a = c \cdots d$
则 $\frac{b}{a} = c \frac{d}{a}$

例 $\frac{7}{3} = \frac{3 \times 2 + 1}{3} = 2\frac{1}{3}$

例 $3\frac{2}{5} = \frac{3 \times 5 + 2}{5} = \frac{17}{5}$



2.2 分数的性质与约分、通分

我的笔记

1. 分数性质: $\frac{a}{b} = \frac{a \times k}{b \times k} = \frac{a \div n}{b \div n}$. ($b \neq 0, k \neq 0, n \neq 0$)

2. 最简分数: 分子分母互素的分数. (计算结果必须为最简分数形式)

3. 约分:

通常情况

分数 $\xrightarrow{\text{分母分子约去公因数}}$ 分数

分数 $\xrightarrow{\text{分母分子约去最大公因数}}$ 最简分数

例 $\frac{4}{8} = \frac{2 \times 2}{2 \times 4} = \frac{2}{4}$.

例 $\frac{12}{18} = \frac{2 \times 2 \times 3}{2 \times 3 \times 3} = \frac{2}{3}$.

4. 通分: 异分母分数 $\xrightarrow{\text{分母扩为最小公倍数}}$ 同分母分数

例 $\frac{9}{25}$ 和 $\frac{4}{15}$ $\xrightarrow{[25, 15] = 75}$ $\frac{27}{75}$ (上下同时乘3) 和 $\frac{20}{75}$ (上下同时乘5)

2.3 分数比大小



我的笔记

1. 比大小的基本方法: ① 作差法: 若 $a-b > 0$, 则 $a > b$; ② 作商法: 若正数 a, b 中 $\frac{a}{b} > 1$, 则 $a > b$.

2. 利用分数性质比大小: ① 通分母法: 分母同, 分子大者大. $\frac{3}{4} (>) \frac{5}{9} \xrightarrow{\text{通分母}} \frac{27}{36} (>) \frac{20}{36}$ (看分子)

② 通分子法: 分子同, 分母大者小. $\frac{2}{123} (<) \frac{3}{184} \xrightarrow{\text{通分子}} \frac{6}{369} (<) \frac{6}{368}$ (看分母)

3. 分数比大小的技巧: ① 基准数法: 若分子分母差相同, 则与1比.

真分数 $\frac{b}{a} < \frac{b+k}{a+k}$ 越加越大; $\frac{3}{4} (<) \frac{4}{5} \xrightarrow{\text{与1比}} 1 - \frac{1}{4} (<) 1 - \frac{1}{5}$

假分数 $\frac{b}{a} < \frac{b+k}{a+k}$ 越加越小; $\frac{4}{3} (>) \frac{5}{4} \xrightarrow{\text{假化带}} 1\frac{1}{3} (>) 1\frac{1}{4}$

② 加成分数: $\frac{b}{a} < \frac{b+d}{a+c} < \frac{d}{c}$, $\frac{1}{3} < \frac{(2)}{(5)} < \frac{1}{2}$

类比浓度: 稀溶液 混合溶液 浓溶液

③ 取倒数法: 若 $\frac{1}{A} > \frac{1}{B}$, 则 $A < B$. $\frac{11}{222} (<) \frac{111}{2222}$ $\xrightarrow{\text{取倒数}} \frac{222}{11} = 20\frac{2}{11} > \frac{2222}{111} = 20\frac{2}{11}$



2.4 分数的加减运算

我的笔记

1. 真假分数的加减: step1: 通分;

step2: 分母不变, 分子相加减;

step3: 化为最简分数.

$$\begin{aligned} \text{例 } \frac{2}{3} - \frac{5}{12} &= \frac{8}{12} - \frac{5}{12} \\ &= \frac{3}{12} \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

2. 带分数的加减:

(法一) 带分数 $\xrightarrow{\text{化为}}$ 假分数

$$1\frac{1}{2} - \frac{2}{3} = \frac{3}{2} - \frac{2}{3} = \frac{9-4}{6} = \frac{5}{6}$$

(法二) 拆分整数与分数

step1: 整数、分数分别算;

step2: 分母通分, 分子相加减;

step3: 化为最简分数 & 带分数.

$\downarrow$
整 + 真分数

$$\text{例 } 3\frac{1}{4} + 4\frac{5}{6}$$

$$= 3 + 4 + \frac{1}{4} + \frac{5}{6}$$

$$= 7 + \frac{3}{12} + \frac{10}{12}$$

$$= 7 + \frac{13}{12} \rightarrow \text{假分数}$$

$$= 8\frac{1}{12} \quad (=7\frac{13}{12}) \times \text{易错}$$

$$\text{例 } 13\frac{1}{2} - 5\frac{3}{5}$$

$$= (13 + \frac{1}{2}) - (5 + \frac{3}{5}) = 7 + \frac{15}{10} - \frac{6}{10}$$

$$= 13 + \frac{5}{10} - 5 - \frac{6}{10} = 7\frac{9}{10}$$

$$= 8 + \frac{5}{10} - \frac{6}{10} \rightarrow \text{不够减}$$

$$= 7 + 1 + \frac{5}{10} - \frac{6}{10} \quad \text{拆整数}$$

2.5 分数的乘除运算



我的笔记

1. 运算法则：乘法： $\frac{p}{q} \times \frac{m}{n} = \frac{p \times m}{q \times n}$

除法：除以一个数等于乘它的**倒数** $A \div \frac{m}{n} = A \times \frac{n}{m}$

乘积为1的两个数互为倒数。例 $\frac{a}{b} \rightarrow \frac{b}{a}$; $\frac{1}{a} \rightarrow a$; $a \rightarrow \frac{1}{a}$

2. 真假分数乘除：

例 $\frac{2}{3} \div \frac{5}{9} \times \frac{15}{16}$

step 1: 除法变乘法

step 2: 对角线约分

step 3: 分子相乘, 分母相乘

$$= \frac{2}{3} \times \frac{9}{5} \times \frac{15}{16}$$

$$= \frac{2}{\cancel{3}_1} \times \frac{\cancel{9}^3}{5} \times \frac{15}{\cancel{16}_8}$$

$$= \frac{9}{8}$$

一样

3. 带分数乘除：

例 $1\frac{4}{5} \div 2\frac{1}{10}$

step 1: 带分数 $\xrightarrow{\text{化为}}$ 假分数 $= \frac{9}{5} \div \frac{21}{10}$

step 2: 除法变乘法

step 3: 对角线约分

step 4: 分子相乘, 分母相乘

$$= \frac{9}{5} \times \frac{10}{21}$$

$$= \frac{6}{7}$$

12字口诀 化带为假, 化除为乘, 先约后积.



2.6 分小互化之有限小数

我的笔记

1. 有限小数判断: step 1: 先化为最简分数.

step 2: 分母分解素因数只含 2 或 5.

$$\frac{a}{b} = a \times \frac{1}{b}$$

有且仅有 $\frac{1}{2^n}, \frac{1}{5^m}, \frac{1}{2^n \times 5^m}$ 除得尽.

2. 互化: 分数 $\frac{p}{q} \xrightarrow[\text{除法 } p \div q]{\text{有限小数 } 0.abc}$

$0.abc = \frac{\overline{abc}}{1000}$, 再化简

3. 常见分小互化表:

$\frac{1}{2} = 0.5$	$\frac{1}{4} = 0.25$	$\frac{1}{8} = 0.125$
	$\frac{3}{4} = 0.75$	$\frac{3}{8} = 0.375$
		$\frac{5}{8} = 0.625$
		
		$\frac{1}{2^n}$

$\frac{1}{5} = 0.2$	$\frac{1}{25} = 0.04$	$\frac{1}{125} = 0.008$
$\frac{2}{5} = 0.4$	$\frac{2}{25} = 0.08$	$\frac{2}{125} = 0.016$
$\frac{3}{5} = 0.6$	$\frac{3}{25} = 0.12$	
$\frac{4}{5} = 0.8$	$\frac{4}{25} = 0.16$	$\frac{1}{5^n}$
		

$\frac{1}{10} = 0.1$
$\frac{1}{20} = 0.05$
$\frac{1}{50} = 0.02$
.....
$\frac{1}{2^n \times 5^m}$

2.7 分小互化之无限循环小数



我的笔记

无限纯循环小数

1. 判断:

最简分数的分母分解素因数不含2或5.

2. 互化:

分数 $\xleftrightarrow{\text{除法}}$ 无限纯循环小数

$$0.\dot{a} = \frac{a}{9}$$

$$0.a\dot{b} = \frac{\overline{ab}}{99}$$

$$0.\overline{abc} = \frac{\overline{abc}}{999}$$

9的个数:
循环节位数

3. 证明: 例求 $0.\dot{i} = ?$.

令 $0.\dot{i} = x$, 则 $10x = 1.\dot{i}$,

$$\therefore 10x - x = 1.\dot{i} - 0.\dot{i}, \quad x = \frac{1}{9}.$$

无限混循环小数

1. 判断:

最简分数的分母分解素因数含2或5和其他.

2. 互化:

分数 $\xleftrightarrow{\text{除法}}$ 无限纯循环小数

$$0.a\dot{b} = \frac{\overline{ab} - a}{90}$$

$$0.\overline{abcde} = \frac{\overline{abcde} - \overline{abc}}{99000}$$

9的个数:
循环节位数

0的个数:
非循环节位数

3. 证明: 例求 $0.1\dot{2} = ?$.

令 $0.1\dot{2} = x$, 则 $10x = 1.2\dot{2}$.

$$\therefore 10x - x = 1.2\dot{2} - 0.1\dot{2}, \quad x = \frac{11}{90}, \quad \therefore 0.1\dot{2} = \frac{11}{90}.$$



2.8 分小混合运算

我的笔记

1. 基本方法：小数转化为分数。

例 $2\frac{3}{5} \div (2.2 + \frac{1}{10}) + \frac{3}{2} \div 6.9$

$= 2\frac{3}{5} \div (\frac{22}{10} + \frac{1}{10}) + \frac{3}{2} \div \frac{69}{10}$

$= \frac{13}{5} \times \frac{10^2}{23} + \frac{3}{2} \times \frac{10^5}{89 \times 23}$

$= \frac{26}{23} + \frac{5}{23}$

$= \frac{31}{23}$

2. 常用技巧：① 提取公因数；

② 可凑整时：分数化小数。

例 $\frac{7}{8} \times 0.32 + 0.875 \times 0.18 + 0.875 \times \frac{1}{2}$

$\frac{7}{8} = 0.875$ 可提公因数

$= 0.875 \times (0.32 + 0.18 + 0.5)$

可凑整

$= 0.875 \times 1$

$= 0.875$ 或 $\frac{7}{8}$

2.9 繁分数运算



我的笔记

1. 繁分数定义: 分子或分母中包含分数. $\frac{\frac{C}{B}}{A}$ ↑ 此分子中含分数
→ 主分数线

2. 运算方法:

step1: 找到主分数线 (最长的那根);

step2: 分别计算分子部分及分母部分;

例 $\frac{4\frac{4}{5} \times 3\frac{3}{4}}{7\frac{1}{5} + \frac{10}{3} \div \frac{5}{6}}$ → 主分数线

$= \frac{\frac{24}{5} \times \frac{15}{4}}{7\frac{1}{5} + \frac{10}{3} \times \frac{6}{5}} = \frac{18}{7\frac{1}{5} + 4}$ → 主

$= 18 \div \frac{56}{5} = 18 \times \frac{5}{56} = \frac{45}{28}$

$= \frac{18 \times 5}{(7\frac{1}{5} + 4) \times 5} = \frac{18 \times 5}{36 + 20} = \frac{45}{28}$

step3: (法一) 将主分数线化为“÷”运算.

(法二) 分子分母同时乘上公分母.



2.10 繁分数巧算之“多层嵌套”

我的笔记

多层嵌套：繁分数的分子/分母依旧是繁分数。（多层分数线）

题型1：计算。方法：分数线由短到长。

例

$$\frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3}}}}$$

解：原式 = $\frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{3}{4}}}$

$$= \frac{1}{1 + \frac{4}{7}}$$

$$= \frac{7}{11}$$

（注：图中展示了从最内层分数线开始，逐步化简的过程，最终得到结果 $\frac{7}{11}$ 。）

题型2：解方程。方法：分数线由长到短。

例

$$\frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{x}}}} = \frac{30}{43}$$

解：

$$\Delta \quad 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{x}}} = \frac{43}{30} = 1 + \frac{13}{30}$$

$$\Delta \quad 2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{x}} = \frac{30}{13} = 2 + \frac{4}{13}$$

$$\Delta \quad 3 + \frac{1}{x} = \frac{13}{4} = 3 + \frac{1}{4}$$

$$\therefore x = 4$$

（注：图中展示了从最外层分数线开始，逐步化简，最终解出 $x = 4$ 的过程。）

2.11 繁分数巧算之“整体约分”



我的笔记

整体约分：分子分母同时约去公因数 A . $\frac{b \times A}{a \times A} = \frac{b}{a}$

1. 基本题型.

$$\begin{aligned}
 \text{例} \quad & \frac{1\frac{2}{3} + 2\frac{3}{4} + 3\frac{4}{5} + \dots + 27\frac{28}{29} + 28\frac{29}{30}}{3\frac{1}{3} + 5\frac{2}{4} + 7\frac{3}{5} + \dots + 55\frac{27}{29} + 57\frac{28}{30}} \\
 &= \frac{\frac{5}{3} + \frac{11}{4} + \frac{19}{5} + \dots + \frac{869}{30}}{\frac{10}{3} + \frac{22}{4} + \frac{38}{5} + \dots + \frac{1738}{30}} \\
 &= \frac{\boxed{\frac{5}{3} + \frac{11}{4} + \frac{19}{5} + \dots + \frac{869}{30}}}{2 \times \boxed{(\frac{5}{3} + \frac{11}{4} + \frac{19}{5} + \dots + \frac{869}{30})}} \quad \text{同时约去} \\
 &= \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

2. 技巧题型.

$$\begin{aligned}
 \text{例} \quad & \frac{1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots + \frac{1}{49} - \frac{1}{50}}{\frac{1}{52} + \frac{1}{54} + \dots + \frac{1}{100}} \\
 &= \frac{(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{49} + \frac{1}{50}) - 2 \times (\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{50})}{\frac{1}{2} \times (\frac{1}{26} + \frac{1}{27} + \dots + \frac{1}{50})} \\
 &= \frac{(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{49} + \frac{1}{50}) - (\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{25})}{\frac{1}{2} \times (\frac{1}{26} + \frac{1}{27} + \dots + \frac{1}{50})} \\
 &= \frac{\boxed{\frac{1}{26} + \frac{1}{27} + \dots + \frac{1}{50}}}{\frac{1}{2} \times (\frac{1}{26} + \frac{1}{27} + \dots + \frac{1}{50})} \\
 &= 2
 \end{aligned}$$



2.12 分数巧算之换元法

我的笔记

1. 换元法：将重复出现的部分看成整体，用字母代替，化繁为简。

2. 解题步骤：
例 $(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}) \times (\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}) - (1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}) \times (\frac{1}{2}+\frac{1}{4})$.

step1: 整体换元A,B; 解: 令 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=A$, $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=B$.

step2: 将式子用A,B表示; $\therefore$ 原式 $= A \times (B+\frac{1}{6}) - (A+\frac{1}{6}) \times B$

step3: 化简新元; $= AB + \frac{1}{6}A - BA - \frac{1}{6}B$

step4: 回代. $= \frac{1}{6}(A-B)$
 $= \frac{1}{6}$

2.13 分数裂项之裂差



2

我的笔记

1. 裂差原理: $\frac{b-a}{ab} = \frac{b}{ab} - \frac{a}{ab} = \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \quad (b > a)$ 或 $\frac{1}{ab} = \frac{1}{b-a} \cdot \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)$

2. 公式变形:

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{n+1}{n(n+1)} - \frac{n}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \quad \leftrightarrow \text{例: } \frac{1}{2 \times 3} = \frac{3}{2 \times 3} - \frac{2}{2 \times 3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$$

$$\frac{k}{n(n+k)} = \frac{n+k}{n(n+k)} - \frac{n}{n(n+k)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+k} \quad \leftrightarrow \text{例: } \frac{2}{3 \times 5} = \frac{5}{3 \times 5} - \frac{3}{3 \times 5} = \frac{1}{3} - \frac{1}{5}$$

$$\frac{1}{n(n+k)} = \frac{1}{k} \left[\frac{n+k}{n(n+k)} - \frac{n}{n(n+k)} \right] = \frac{1}{k} \left[\frac{1}{n} - \frac{1}{n+k} \right] \quad \leftrightarrow \text{例: } \frac{1}{3 \times 5} = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3 \times 5} = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right)$$

3. 典型例题:

$$\begin{aligned} \text{例 } & \frac{1}{1 \times 4} + \frac{1}{4 \times 7} + \frac{1}{7 \times 10} + \cdots + \frac{1}{2020 \times 2023} \\ &= \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{7} + \cdots + \frac{1}{2020} - \frac{1}{2023} \right) \\ &= \frac{1}{3} \times \left(1 - \frac{1}{2023} \right) \\ &= \frac{674}{2023} \end{aligned}$$

构造裂差 $\xrightarrow{\text{目的}}$ 加减抵消

1. 裂和原理: $\frac{b+a}{ab} = \frac{b}{ab} + \frac{a}{ab} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$

2. 公式变形: $\frac{2n+1}{n(n+1)} = \frac{n+1}{n(n+1)} + \frac{n}{n(n+1)} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}$

例: $\frac{5}{2 \times 3} = \frac{3}{2 \times 3} + \frac{2}{2 \times 3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$

3. 经典例题: 题型一: 裂和抵消

例 $\frac{3}{1 \times 2} - \frac{5}{2 \times 3} + \frac{7}{3 \times 4} - \cdots - \frac{201}{100 \times 101}$

$$\begin{aligned} &= 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \cdots - \frac{1}{100} - \frac{1}{101} \\ &= 1 - \frac{1}{101} \\ &= \frac{100}{101} \end{aligned}$$



2.14 分数裂项之裂和

我的笔记

1. 裂和原理: $\frac{b+a}{ab} = \frac{b}{ab} + \frac{a}{ab} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$

2. 公式变形:

$$\frac{2n+1}{n(n+1)} = \frac{n+1}{n(n+1)} + \frac{n}{n(n+1)} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}$$

$$\frac{a^2+b^2}{ab} = \frac{a^2}{ab} + \frac{b^2}{ab} = \frac{a}{b} + \frac{b}{a}$$

例: $\frac{5}{2 \times 3} = \frac{3}{2 \times 3} + \frac{2}{2 \times 3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$

例: $\frac{3^2+5^2}{3 \times 5} = \frac{3^2}{3 \times 5} + \frac{5^2}{3 \times 5} = \frac{3}{5} + \frac{5}{3}$

3. 经典例题: 题型一: 裂和抵消

例 $\frac{3}{1 \times 2} - \frac{5}{2 \times 3} + \frac{7}{3 \times 4} - \dots - \frac{201}{100 \times 101}$

$$= 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \dots - \frac{1}{100} - \frac{1}{101}$$

$$= 1 - \frac{1}{101}$$

$$= \frac{100}{101}$$

题型二: 裂和凑整

例 $\frac{1^2+2^2}{1 \times 2} + \frac{2^2+3^2}{2 \times 3} + \dots + \frac{9^2+10^2}{9 \times 10}$

$$= \frac{2}{1} + \boxed{\frac{1}{2} + \frac{3}{2}} + \boxed{\frac{2}{3} + \frac{4}{3}} + \dots + \boxed{\frac{8}{9} + \frac{10}{9}} + \frac{9}{10}$$

$$= 2 + 2 \times 8 + \frac{9}{10}$$

$$= 18 \frac{9}{10}$$

2.15 分数裂项之裂差拓展



我的笔记

分母三项相乘

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2} \times \frac{(n+2)-n}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2} \times \left[\frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right]$$

$$\begin{aligned} \text{例} \quad & \frac{1}{1 \times 2 \times 3} + \frac{1}{2 \times 3 \times 4} + \frac{1}{3 \times 4 \times 5} + \cdots + \frac{1}{99 \times 100 \times 101} \\ &= \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{1 \times 2} - \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{2 \times 3} - \frac{1}{3 \times 4} + \cdots + \frac{1}{99 \times 100} - \frac{1}{100 \times 101} \right) \\ &= \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{1 \times 2} - \frac{1}{100 \times 101} \right) = \frac{5049}{20200} \end{aligned}$$

$$\frac{1}{n(n+k)(n+2k)} = \frac{1}{2k} \times \frac{(n+2k)-n}{n(n+k)(n+2k)} = \frac{1}{2k} \times \left[\frac{1}{n(n+k)} - \frac{1}{(n+k)(n+2k)} \right]$$

$$\begin{aligned} \text{例} \quad & \frac{1}{1 \times 3 \times 5} + \frac{1}{3 \times 5 \times 7} + \frac{1}{5 \times 7 \times 9} + \cdots + \frac{1}{99 \times 101 \times 103} \\ &= \frac{1}{4} \times \left(\frac{1}{1 \times 3} - \frac{1}{3 \times 5} + \frac{1}{3 \times 5} - \frac{1}{5 \times 7} + \cdots + \frac{1}{99 \times 101} - \frac{1}{101 \times 103} \right) \\ &= \frac{1}{4} \times \left(\frac{1}{1 \times 3} - \frac{1}{101 \times 103} \right) = \frac{2600}{31209} \end{aligned}$$

阶乘裂项

$$\frac{n}{(n+1)!} = \frac{n+1}{(n+1)!} - \frac{1}{(n+1)!} = \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}$$

$$\begin{aligned} \text{例} \quad & \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \cdots + \frac{99}{100!} \\ &= \frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{99!} - \frac{1}{100!} \\ &= \frac{1}{1!} - \frac{1}{100!} = \frac{100!-1}{100!} \end{aligned}$$

$$n \cdot n! = (n+1) \cdot n! - n! = (n+1)! - n!$$

$$\begin{aligned} \text{例} \quad & 1 \times 1! + 2 \times 2! + 3 \times 3! + \cdots + 100 \times 100! \\ &= -1! + 2! - 2! + 3! - 3! + 4! - \cdots \\ &\quad - 100! + 101! \\ &= 101! - 1 \end{aligned}$$

题型1: 连续两项相乘.

$$n(n+1) = \frac{1}{3} \left[\overbrace{-(n-1)n(n+1) + n(n+1)(n+2)}^{\text{差3}} \right]$$

$$\begin{aligned} \text{例} \quad & 1 \times 2 = \frac{1}{3} \times (-0 \times 1 \times 2 + 1 \times 2 \times 3) \\ & 2 \times 3 = \frac{1}{3} \times (-1 \times 2 \times 3 + 2 \times 3 \times 4) \\ & 3 \times 4 = \frac{1}{3} \times (-2 \times 3 \times 4 + 3 \times 4 \times 5) \\ & \vdots \\ & 99 \times 100 = \frac{1}{3} \times (-98 \times 99 \times 100 + 99 \times 100 \times 101) \end{aligned}$$

99式相加:

$$1 \times 2 + 2 \times 3 + \cdots + 99 \times 100 = \frac{1}{3} \times 99 \times 100 \times 101 = 3333$$

$$\text{结论: } 1 \times 2 + 2 \times 3 + \cdots + n(n+1) = \frac{1}{3} n(n+1)(n+2)$$



2.16 整数裂项

我的笔记

题型1: 连续两项相乘.

$$n(n+1) = \frac{1}{3} \left[\boxed{-(n-1)n(n+1)} + \boxed{n(n+1)(n+2)} \right]$$

差3

例 $1 \times 2 = \frac{1}{3} \times (-0 \times 1 \times 2 + \boxed{1 \times 2 \times 3})$

$2 \times 3 = \frac{1}{3} \times (\boxed{-1 \times 2 \times 3} + \boxed{2 \times 3 \times 4})$

$3 \times 4 = \frac{1}{3} \times (\boxed{-2 \times 3 \times 4} + \boxed{3 \times 4 \times 5})$

⋮

$99 \times 100 = \frac{1}{3} \times (\boxed{-98 \times 99 \times 100} + \boxed{99 \times 100 \times 101})$

99式相加:

$$1 \times 2 + 2 \times 3 + \cdots + 99 \times 100 = \frac{1}{3} \times 99 \times 100 \times 101 = 333300$$

结论: $1 \times 2 + 2 \times 3 + \cdots + n(n+1) = \frac{1}{3} n(n+1)(n+2)$

题型2: 连续三项相乘.

$$n(n+1)(n+2) = \frac{1}{4} \left[\boxed{-(n-1)n(n+1)(n+2)} + \boxed{n(n+1)(n+2)(n+3)} \right]$$

差4

例 $1 \times 2 \times 3 = \frac{1}{4} \times (-0 \times 1 \times 2 \times 3 + \boxed{1 \times 2 \times 3 \times 4})$

$2 \times 3 \times 4 = \frac{1}{4} \times (\boxed{-1 \times 2 \times 3 \times 4} + \boxed{2 \times 3 \times 4 \times 5})$

$3 \times 4 \times 5 = \frac{1}{4} \times (\boxed{-2 \times 3 \times 4 \times 5} + \boxed{3 \times 4 \times 5 \times 6})$

⋮

$99 \times 100 \times 101 = \frac{1}{4} \times (\boxed{-98 \times 99 \times 100 \times 101} + \boxed{99 \times 100 \times 101 \times 102})$

99式相加:

$$1 \times 2 \times 3 + 2 \times 3 \times 4 + \cdots + 99 \times 100 \times 101 = \frac{1}{4} \times 99 \times 100 \times 101 \times 102$$

结论: $1 \times 2 \times 3 + 2 \times 3 \times 4 + \cdots + n(n+1)(n+2) = \frac{1}{4} n(n+1)(n+2)(n+3)$



2.17 单位分数的拆分

我的笔记

单位分数: $\frac{1}{n}$.

拆分: $\frac{1}{n} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ n 的约数 $n_1, n_2, n_3, \dots$

$$a \cdot b = n_2 \cdot n_1$$

$$\begin{array}{c} \text{取因数} \quad \text{扩分} \quad \text{拆分} \quad \text{约分} \\ \text{取 } n \text{ 的因数 } n_1, n_2 \quad \frac{1}{n} = \frac{n_1+n_2}{n(n_1+n_2)} = \frac{n_1}{n(n_1+n_2)} + \frac{n_2}{n(n_1+n_2)} = \frac{1}{\frac{n}{n_1}(n_1+n_2)} + \frac{1}{\frac{n}{n_2}(n_1+n_2)} \Rightarrow a \quad \frac{n}{n_2}(n_1+n_2) \Rightarrow b \end{array}$$

例 $\frac{1}{6} = \frac{1}{()} + \frac{1}{()}$ 6 的因数: $1, 2, 3, 6$

取 1, 2 $\frac{1}{6} = \frac{1 \times (1+2)}{6 \times (1+2)} = \frac{1 \times 1}{6 \times (1+2)} + \frac{1 \times 2}{6 \times (1+2)} = \frac{1}{18} + \frac{1}{9}$

取 1, 3 $\frac{1}{6} = \frac{1}{24} + \frac{1}{8}$ 取 1, 6 $\frac{1}{6} = \frac{1}{42} + \frac{1}{7}$ 取 2, 3 $\frac{1}{6} = \frac{1}{15} + \frac{1}{10}$ 取 1, 1 $\frac{1}{6} = \frac{1}{12} + \frac{1}{12}$

注:

① 对于 $\frac{1}{n} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$, 若取 $\frac{n_1}{n_2} = \frac{n_3}{n_4}$, 则答案一致.

② 对于 $\frac{1}{n} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$, 取因数 n_1, n_2, n_3 , 其余同上.

③ 对于 $\frac{1}{n} = \frac{1}{a} - \frac{1}{b}$, 则“+”变“-”, 其余同上.

拆分: $\frac{k}{n} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$

$$\begin{array}{c} \text{取因数} \quad \text{扩分} \quad \text{拆分} \quad \text{约分} \\ \text{取 } n \text{ 的因数 } n_1, n_2, \text{ 满足 } k | (n_1+n_2) \quad \frac{k}{n} = \frac{k(n_1+n_2)}{n(n_1+n_2)} = \frac{k \cdot n_1}{n(n_1+n_2)} + \frac{k \cdot n_2}{n(n_1+n_2)} = \frac{1}{\frac{n}{n_1} \cdot \frac{n_1+n_2}{k}} + \frac{1}{\frac{n}{n_2} \cdot \frac{n_1+n_2}{k}} \end{array}$$



2.18 量率对应

我的笔记

1. 量率对应:

A占/是/为B的 $\frac{A}{B}$.
 $\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$
分量 单位“1” 分率
 Δ

两大思路: ① 寻找单位“1”;

② 确定已知二要素.

$\frac{A}{B}$ → 分量 = 单位“1” × 分率
 → 分率 = 分量 ÷ 单位“1”
 → 单位“1” = 分量 ÷ 分率

全班30人, 男生占 $\frac{3}{5}$, 男生人数为: $30 \times \frac{3}{5} = 18$ (人).

男生18人, 全班30人, 男生占全班的: $18 \div 30 = \frac{3}{5}$.

男生18人, 占全班 $\frac{3}{5}$, 全班人数为: $18 \div \frac{3}{5} = 30$ (人).

2. 常见题型:

① A比B多: $\frac{A-B}{B} = \frac{A-B}{B}$;

② B比A少: $\frac{A-B}{A} = \frac{A-B}{A}$;

例 10cm^3 的冰融化成水后体积变成 9cm^3 .

① 融化: 体积减少(冰的): $\frac{10-9}{10} = \frac{1}{10}$.

② 结冰: 体积增大(水的): $\frac{10-9}{9} = \frac{1}{9}$.

2.19 工程问题



我的笔记

1. 工程问题模型建立: 工程的工作总量为1. n 天完工, 工作效率为 $\frac{1}{n}$.

$$\begin{array}{l} \boxed{\frac{1}{n}} \rightarrow \begin{array}{l} \text{工作总量} = \text{工作效率} \times \text{工作时间} \\ \text{工作效率} = \text{工作总量} \div \text{工作时间} \\ \text{工作时间} = \text{工作总量} \div \text{工作效率} \end{array} \end{array} \quad \text{类比行程问题} \quad \begin{cases} S = v \times t \\ v = \frac{S}{t} \\ t = \frac{S}{v} \end{cases}$$

例: 修建一条马路, 甲计划 n 天完工, 每天完成 $\frac{1}{n}$, a 天后完成 $\frac{a}{n}$. 乙每天完成 $\frac{1}{m}$, 乙 m 天可以完工.

2. 常见合作方式: 例 甲工效为 $\frac{1}{n}$, 乙工效为 $\frac{1}{m}$, 两人合作修建一条马路, 合作效率为 $\frac{1}{m} + \frac{1}{n}$.

分段合作

① 甲工作 a 天后, 甲乙合作 b 天.

$$\frac{1}{n} \times a + (\frac{1}{n} + \frac{1}{m}) \times b = 1$$

分人合作

② 甲工作 a 天, 乙工作 b 天, 共同完成.

$$\frac{1}{n} \times a + \frac{1}{m} \times b = 1$$

交替合作

③ 甲乙交替工作, 最后谁完成?

$$1 \div (\frac{1}{n} + \frac{1}{m}) = a \cdots k$$

若 $k \leq \frac{1}{n}$ 则甲; 若 $k > \frac{1}{n}$, 则乙.