

第一章

数的整除

小初衔接

1.1 整除的定义与性质



我的笔记

1. 整除的定义:

整数 a 除以整数 b , 商为整数且余数为0.

$a \div b \Rightarrow b | a$ b 能整除 a ; a 能被 b 整除.

2. 整除的研究范围: 正整数

3. 区分整除与除尽:

整除: 整数 $a \div$ 整数 $b =$ 整数 c

例 $6 \div 2 = 3$

除尽: $a \div b =$ 整数或有限小数 c

例 $6 \div 2 = 3$

$0.6 \div 2 = 0.3$

$6 \div 0.2 = 30$

$6 \div 20 = 0.3$

4. 整除的性质:

① 传递: $m | a; a | b \Rightarrow m | b$

$m | a \Rightarrow m | ka$

例 $2 | 6; 6 | 12 \Rightarrow 2 | 12; 2 | 6 \Rightarrow 2 | 6 \times 5$

② 组合: $m | a; m | b \Rightarrow m | (a \pm b)$

例 $3 | 18; 3 | 12 \Rightarrow 3 | (18 \pm 12)$

③ 拆分: $m | a; n | a; (m, n) = 1 \Rightarrow mn | a$

例 $2 | 18; 3 | 18 \Rightarrow 2 \times 3 | 18$



1.2 特殊数的整除之数尾系

我的笔记

1. 看末1位:

① 被2整除的数的特征:
个位为0, 2, 4, 6, 8. (2的倍数)

② 被5整除的数的特征:
个位为0或5. (5的倍数)

③ 位值原理证明:

$$\overline{abc|d} = \overline{abc} \times \boxed{10} + \boxed{d}$$

满足被2, 5整除

④ 例 $2 \mid 37658$ $5 \mid 43765$

2. 看末2位:

① 被4整除的数的特征:
末两位为00, 04, 08, ..., 92, 96.
(4的倍数)

② 被25整除的数的特征:
末两位为00, 25, 50, 75.
(25的倍数)

③ 位值原理证明:

$$\overline{abc|d} = \overline{ab} \times \boxed{100} + \boxed{cd}$$

满足被4, 25整除

④ 例 $4 \mid 3728$ $25 \mid 36750$

3. 看末3位:

① 被8整除的数的特征:
末三位为000, 008, 016, ..., 992.
(8的倍数)

② 被125整除的数的特征:
末三位为000, 125, 250, 375, 500,
625, 750, 875. (125的倍数)

③ 位值原理证明:

$$\overline{abc|de} = \overline{abc} \times \boxed{1000} + \boxed{cde}$$

满足被8, 125整除

④ 例 $8 \mid 7024$ $125 \mid 36750$

1.3 特殊数的整除之数系



我的笔记

✧ 从右往左断位, 求和

✧ 证明: 位值原理

1. 断1位求和: 9
(及9的因数3)

若 $9 \mid \overline{abcde}$
则 $9 \mid (a+b+c+d+e)$

① 证明: $\overline{abcde}$
 $= 10000a + 1000b + 100c + 10d + e$
 $= \boxed{9999a + 999b + 99c + 9d} + \boxed{(a+b+c+d+e)}$

② 例 $\overline{12345}$
 $3 \mid (1+2+3+4+5) \Leftrightarrow 3 \mid 12345$

2. 断2位求和: 99
(及99的因数33, 11, ...)

若 $99 \mid \overline{abcde}$
则 $99 \mid (\overline{de} + \overline{bc} + a)$

① 证明: $\overline{abcde}$
 $= 10000a + 100\overline{bc} + \overline{de}$
 $= \boxed{9999a + 99\overline{bc}} + \boxed{(a + \overline{bc} + \overline{de})}$

② 例 $\overline{12342}$
 $33 \mid (42 + 23 + 1) \Leftrightarrow 33 \mid 12342$

3. 断3位求和: 999
(及999的因数333, 111, ...)

若 $999 \mid \overline{abcde}$
则 $999 \mid (\overline{cde} + \overline{ab})$

① 证明: $\overline{abcde}$
 $= 1000\overline{ab} + \overline{cde}$
 $= \boxed{999\overline{ab}} + \boxed{(\overline{ab} + \overline{cde})}$

② 例 $\overline{123210}$
 $333 \mid (123 + 210) \Leftrightarrow 333 \mid 123210$



1.4 特殊数的整除之数差系

我的笔记

✧ 从右往左断位，奇段和与偶段和作差 ✧ 证明：位值原理

1. 断1位作差：11

$$\begin{array}{c} \begin{array}{c} + & - & + \\ \diagup & \diagdown & \diagup \\ \textcircled{a} & \textcircled{b} & \textcircled{c} & \textcircled{d} & \textcircled{e} \end{array} \\ \text{若 } 11 \mid \overline{abcde} \\ \text{则 } 11 \mid (a+c+e)-(b+d) \end{array}$$

$$\begin{aligned} \text{① 证明：} & \overline{abcde} \\ &= 10000a + 1000b + 100c + 10d + e \\ &= \boxed{9999a + 1001b + 99c + 11d} \\ & \quad + \boxed{(a+c+e-b-d)} \end{aligned}$$

$$\begin{array}{c} \text{② 例} \quad \begin{array}{c} - & + \\ \diagup & \diagdown \\ \textcircled{2} & \textcircled{3} & \textcircled{5} & \textcircled{4} \end{array} \\ \therefore 11 \mid (3+4)-(2+5) \\ \therefore 11 \mid 2354 \end{array}$$

2. 断2位作差：101

$$\begin{array}{c} \begin{array}{c} + \\ \diagup & \diagdown \\ \textcircled{a} & \textcircled{b} & \textcircled{c} & \textcircled{d} & \textcircled{e} \end{array} \\ \text{若 } 101 \mid \overline{abcde} \\ \text{则 } 101 \mid (\overline{de} + a - \overline{bc}) \end{array}$$

$$\begin{aligned} \text{① 证明：} & \overline{abcde} \\ &= 10000a + 100\overline{bc} + \overline{de} \\ &= \boxed{9999a + 101\overline{bc}} + \boxed{(a + \overline{de} - \overline{bc})} \end{aligned}$$

$$\begin{array}{c} \text{② 例} \quad \begin{array}{c} + \\ \diagup & \diagdown \\ \textcircled{1} & \textcircled{2} & \textcircled{5} & \textcircled{2} & \textcircled{4} \end{array} \\ \therefore 101 \mid (1+24)-25 \\ \therefore 101 \mid 12524 \end{array}$$

3. 断3位作差：1001 = 7 × 11 × 13

$$\begin{array}{c} \begin{array}{c} - & + \\ \diagup & \diagdown \\ \textcircled{a} & \textcircled{b} & \textcircled{c} & \textcircled{d} & \textcircled{e} & \textcircled{f} \end{array} \\ \text{若 } 1001 \mid \overline{abcdef} \\ \text{则 } 1001 \mid (\overline{def} - \overline{abc}) \end{array}$$

$$\begin{aligned} \text{① 证明：} & \overline{abcdef} \\ &= 1000\overline{abc} + \overline{def} \\ &= \boxed{1001\overline{abc}} + \boxed{(\overline{def} - \overline{abc})} \end{aligned}$$

$$\begin{array}{c} \text{② 例} \quad \begin{array}{c} - & + \\ \diagup & \diagdown \\ \textcircled{1} & \textcircled{2} & \textcircled{3} & \textcircled{1} & \textcircled{2} & \textcircled{3} \end{array} \\ \therefore 13 \mid (123-123) \\ \therefore 13 \mid 123123 \end{array}$$



1.5 逐级整除

我的笔记

逐级整除 整数 N 能被 a, b, c 分别整除, 采用逐级满足法.

$\Delta \Delta$

解题思路: step1: 优先满足数尾系, 先来末1位, 再来末2位, 以此类推;

step2: 再满足数和、数差系.

例 六位数 $\overline{87A43B}$ 能被 2, 5, 9 整除, 求 A, B .

解: step1: 满足数尾系末1位: $2|B, 5|B \Rightarrow B=0$;

step2: 满足数和系: $9|(8+7+A+4+3+0) \Rightarrow 9|(22+A) \Rightarrow A=5. \therefore A=5, B=0$.

例 六位数 $\overline{92A03B}$ 能被 4, 9, 11 整除, 求 A, B .

解: step1: 满足数尾系末2位: $4|\overline{3B} \Rightarrow B=2, 6$;

step2: 满足数和系: $9|A+B+5 \Rightarrow A+B=4, 13$;

step3: 满足数差系: $11|(3+A+9)-(B+0+2) \Rightarrow A-B=1. \therefore A=7, B=6$.



1.6 复合数的整除

我的笔记

复合数的整除 整数 N 能被 A 整除, 其中 $A=a \times b$ 且 $(a, b)=1$.

解题思路: step1: 先拆分 $A=a \times b$ 且 $(a, b)=1$;
step2: 再采用逐级满足法.

例 六位数 $\overline{15A32B}$ 能被 72 整除, 求 A, B .

解: step1: 拆分 $72=8 \times 9$ 且 $(8, 9)=1$;

step2: 逐级满足 i) $8 \mid \overline{15A32B} \Rightarrow 8 \mid \overline{32B}$, $\therefore B=0$ 或 8 ;

ii) $9 \mid \overline{15A32B} \Rightarrow 9 \mid (1+5+A+3+2+B)$,

当 $B=0$ 时, $9 \mid (11+A)$, $\therefore A=7$,

当 $B=8$ 时, $9 \mid (19+A)$, $\therefore A=8$,

$\therefore \begin{cases} A=7 \\ B=0 \end{cases}$, 或 $\begin{cases} A=8 \\ B=8 \end{cases}$.



1.7 整除之试除法

我的笔记

适用题型：整数 $\overline{AB\Box\Box\Box}$ (末尾几位数字未知) 能被 a 整除.

技巧解法 试除法(2种)

试除法一：试9砍余

例 $N = \overline{12\Box\Box\Box}$ 能被478整除, 求 N .

step1: 尾填9试除 $\overline{AB999} \div a = b \cdots r$ (法一) $12999 \div 478 = 27 \cdots 93$

step2: 被除数砍余 $a | (\overline{AB999} - r) \rightarrow \text{最大值} \leftarrow 12999 - 93 = 12906$

$$a | (\overline{AB999} - r - na) \quad 12999 - 478 = 12428$$

试除法二：试0补余

step1: 尾填0试除 $\overline{AB000} \div a = c \cdots r$ (法二) $12000 \div 478 = 25 \cdots 50$

step2: 被除数补余 $a | (\overline{AB000} - r + a) \rightarrow \text{最小值} \leftarrow 12000 - 50 + 478 = 12428$

$$a | (\overline{AB000} - r + na) \quad 12428 + 478 = 12906$$

$\therefore N = 12906$ 或 12428 .



1.8 整除中的容斥问题

我的笔记

整除个数的计算:

1. $1 \sim n$ 中被 a 整除的个数 $\left[\frac{n}{a} \right]$. 取整符号

2. $1 \sim n$ 中能同时被 a, b 整除的个数 $\left[\frac{n}{k_{ab}} \right]$, 其中 $k_{ab} = [a, b]$. 最小公倍数符号

题型1: 求在 $1 \sim n$ 中, 能被 a 或 b 整除的数的个数. $\left[\frac{n}{a} \right] + \left[\frac{n}{b} \right] - \left[\frac{n}{k_{ab}} \right]$

例 $\begin{matrix} \downarrow & & \downarrow & \downarrow \\ 100 & 2 & 3 \end{matrix} \quad \left[\frac{100}{2} \right] + \left[\frac{100}{3} \right] - \left[\frac{100}{6} \right] = 50 + 33 - 16 = 67$

题型2: 求在 $1 \sim n$ 中, 能被 a 或 b 或 c 整除的数的个数.

例 $\begin{matrix} \downarrow & & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 100 & 2 & 3 & 5 \end{matrix} \quad \left[\frac{n}{a} \right] + \left[\frac{n}{b} \right] + \left[\frac{n}{c} \right] - \left[\frac{n}{k_{ab}} \right] - \left[\frac{n}{k_{ac}} \right] - \left[\frac{n}{k_{bc}} \right] + \left[\frac{n}{k_{abc}} \right]$

$$\left[\frac{100}{2} \right] + \left[\frac{100}{3} \right] + \left[\frac{100}{5} \right] - \left[\frac{100}{6} \right] - \left[\frac{100}{10} \right] - \left[\frac{100}{15} \right] + \left[\frac{100}{30} \right] = 50 + 33 + 20 - 16 - 10 - 6 + 3 = 74$$

1.9 因数与倍数



我的笔记

1. 定义: 整数 a 能被整数 b 整除: $b|a$, 则称 $\begin{cases} b \text{ 是 } a \text{ 的 因数 / 约数,} \\ a \text{ 是 } b \text{ 的 倍数.} \end{cases}$

例 $3|18 \Rightarrow \begin{cases} 3 \text{ 是 } 18 \text{ 的 因数 / 约数,} \\ 18 \text{ 是 } 3 \text{ 的 倍数.} \end{cases}$

2. 理解: 一个数 n 的 $\begin{cases} \text{因数为有限个, 最小为 } 1, \text{ 最大为本身 } n. \\ \text{倍数为无限个, 最小为本身 } n, \text{ 无最大倍数.} \end{cases}$

✧ 最大因数 = 最小倍数 = 数本身 n



1.10 素数与合数

我的笔记

1. 定义: { 素数(质数): 只有1和它本身两个因数.
合数: 除了1和它本身外还有其他因数.

2. 正整数的分类: {
1 : 因数个数=1 $\rightarrow$ 1 $\nearrow$ 既不是素数也不是合数
素数: 因数个数=2 $\rightarrow$ 2, 3, 5, 7, 11, 13, ... $\nearrow$ 2是最小素数, 唯一偶素数
合数: 因数个数 ≥ 3 $\rightarrow$ 4, 6, 8, 9, 10, 12, ... $\searrow$ 4是最小合数

3. 熟记100以内素数: $\overset{*}{\boxed{2}}, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43$
47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97 $\rightarrow$ 共25个

1.11 分解素因数



1.1

我的笔记

1. **素因数**: 每个合数都可以写成几个素数相乘的形式, 其中每个素数都是这个合数的**素因数**.

例 $6 = 2 \times 3$ 6的素因数: **2, 3**

$8 = 2 \times 2 \times 2$ 8的素因数: **2, 2, 2**

2. **分解素因数**: 把合数用素因数相乘的形式表示. 分解方法: **短除法**

分解步骤: step1: 从能整除合数 N 的**最小素数** a 开始除,

step2: 若商 M 为合数, 则继续除下去;

step3: 直至商为**素数**停止;

step4: 将除数和商由**小到大**相乘.

$$\begin{array}{r} a \overline{) N} \\ b \overline{) M} \\ \vdots \\ C \end{array}$$

例: $\begin{array}{r} 2 \overline{) 60} \\ 2 \overline{) 30} \\ 3 \overline{) 15} \\ 5 \end{array} \rightarrow \text{素数为止}$

$60 = 2 \times 2 \times 3 \times 5$ (或 $2^2 \times 3 \times 5$)

1. **概念**: 12的因数: 1, 2, 3, 4, 6, 12
18的因数: 1, 2, 3, 6, 9, 18

A 与 B 公因数: $\begin{cases} \text{个数: 有限} \\ \text{最小: 1} \\ \text{最大公因数: } (A, B) \end{cases}$

$(12, 18) = 6$

特例: 若 $(A, B) = 1$, 则称 A 与 B 互素.

2. **求解方法**:

法一: **分解素因数** 例 求 $(36, 24)$ 和 $[36, 24]$

$N = a \times b \times c$

$M = a \times b \times d$

$(N, M) = a \times b$

$[N, M] = a \times b \times c \times d$

$36 = 2 \times 2 \times 3 \times 3$

$24 = 2 \times 2 \times 2 \times 3$

$(36, 24) = 2 \times 2 \times 3 = 12$

$[36, 24] = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 = 72$



1.12 最大公因数与最小公倍数

我的笔记

1. 概念: 12的因数: 1, 2, 3, 4, 6, 12

18的因数: 1, 2, 3, 6, 9, 18

A与B公因数: $\begin{cases} \text{个数: 有限} \\ \text{最小: 1} \end{cases}$

$$(12, 18) = 6$$

最大公因数: (A, B)

特例: 若 $(A, B) = 1$, 则称A, B互素.

12的倍数: 12, 24, 36, 48, 60, 72, ...

18的倍数: 18, 36, 54, 72, 90, ...

A与B的公倍数: $\begin{cases} \text{个数: 无穷} \\ \text{最大: 无} \end{cases}$

$$[12, 18] = 36$$

最小公倍数: $[A, B]$

2. 求解方法:

法一: 分解素因数 例 求 $(36, 24)$ 和 $[36, 24]$.

$$N = a \times b \times c$$

$$M = a \times b \times d$$

$$(N, M) = a \times b$$

$$[N, M] = a \times b \times c \times d$$

$$36 = 2 \times 2 \times 3 \times 3$$

$$24 = 2 \times 2 \times 2 \times 3$$

$$(36, 24) = 2 \times 2 \times 3 = 12$$

$$[36, 24] = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 = 72$$

法二: 短除法

$$\begin{array}{r|rr} a & N & M \\ b & : & : \\ \hline c & d & \end{array} \rightarrow (c, d) = 1$$

$$(N, M) = a \times b$$

$$[N, M] = a \times b \times c \times d$$

例 求 $(36, 24)$ 和 $[36, 24]$.

$$\begin{array}{r|rr} 2 & 36 & 24 \\ 2 & 18 & 12 \\ 3 & 9 & 6 \\ \hline 3 & 3 & 2 \end{array}$$

$$(36, 24) = 2 \times 2 \times 3 = 12$$

$$[36, 24] = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 2 = 72$$

1.13 多个数的最大公因数与最小公倍数



我的笔记

求解方法：

例 求 $(18, 24, 84)$ 和 $[18, 24, 84]$ 。

法一：分解素因数法

step1: 将每个数分解为素因数

$$\begin{cases} N = a^1 \times b^5 \times c^3 \\ M = a^4 \times b^2 \times d^6 \\ P = a^7 \times b^8 \end{cases}$$

$$18 = 2^1 \times 3^2$$

$$24 = 2^3 \times 3^1$$

$$84 = 2^2 \times 3^1 \times 7^1$$

step2: 将所有共有的素因数相乘 $\rightarrow (N, M, P) = a^1 \times b^2$

$$(18, 24, 84) = 2^1 \times 3^1 = 6$$

将所有素因数的最高次幂相乘 $\rightarrow [N, M, P] = a^7 \times b^8 \times c^3 \times d^6$

$$[18, 24, 84] = 2^3 \times 3^2 \times 7^1 = 504$$

法二：短除法

step1: 先用三个数的公因数去除

再用其中两个数的公因数去除

$$\begin{array}{c|ccc} a & N & M & P \\ \hline b & : & : & : \\ \hline c & d & e & \end{array}$$

$$\rightarrow (c, d, e) = 1$$

$$\begin{array}{c|ccc} 2 & 18 & 24 & 84 \\ \hline 3 & 9 & 12 & 42 \\ \hline 2 & 3 & 4 & 14 \\ \hline 3 & 3 & 2 & 7 \end{array}$$

$$(4, 14) = 2$$

$$(3, 2, 7) = 1$$

step2: 将所有除数相乘 $\rightarrow (N, M, P) = a \times b$

$$(18, 24, 84) = 2 \times 3 = 6$$

将所有除数和最后的商相乘 $\rightarrow [N, M, P] = a \times b \times c \times d \times e$

$$[18, 24, 84] = 2 \times 3 \times 2 \times 3 \times 2 \times 7 = 504$$



1.14 短除模型

我的笔记

短除模型

$$\begin{array}{r} m \overline{) A \ B} \\ a \ b \end{array} \rightarrow (a, b) = 1$$

$$\therefore A = ma, B = mb \rightarrow AB = ma \cdot mb = m^2 ab$$

$$(A, B) = m, [A, B] = mab \rightarrow (A, B) \cdot [A, B] = m \cdot mab = m^2 ab$$

$$\text{结论 } AB = (A, B) \cdot [A, B]$$

适用题型 已知 A, B 两数的 (A, B) 或 $[A, B]$, 反求 A, B 两数.

例1 已知 $(A, B) = 12, A + B = 96$, 求 A, B .

$$\begin{array}{r} 12 \overline{) A \ B} \\ a \ b \end{array}$$

$$\therefore \text{令 } A = 12a, B = 12b \rightarrow 12a + 12b = 96$$

$$(a, b) = 1 \quad a + b = 8$$

$$\text{得 } \begin{cases} a=1, \\ b=7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=12, \\ B=84 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} a=3, \\ b=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=36, \\ B=60. \end{cases}$$

例2 已知 $(A, B) = 12, [A, B] = 180$, 求 A, B .

$$\begin{array}{r} 12 \overline{) A \ B} \\ a \ b \end{array}$$

$$\therefore \text{令 } A = 12a, B = 12b \rightarrow 12ab = 180$$

$$(a, b) = 1 \quad ab = 15$$

$$\text{得 } \begin{cases} a=1, \\ b=15 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=12, \\ B=180 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} a=3, \\ b=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=36, \\ B=60. \end{cases}$$

1.15 辗转相除法



我的笔记

作用：用于求两数的最大公因数。

方法：对于给定的两个数 A, B ，用较大的数 A 除以较小的数 B ，将较小的数 B 和余数 C 构成新的一对数 B, C ，继续上面的除法，直到大数被整除，这时除数 N 是两数的最大公因数。

步骤：求 (A, B) ，其中 $A > B$ 。

例 求 $(6109, 5513)$ 。

$$\begin{aligned} A \div B &= \text{商}_1 \cdots C \\ B \div C &= \text{商}_2 \cdots D \\ C \div D &= \text{商}_3 \cdots E \\ &\vdots \\ M \div N &= \text{商}_n \rightarrow \text{整除} \\ (A, B) &= N \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 6109 \div 5513 &= 1 \cdots 596 \\ 5513 \div 596 &= 9 \cdots 149 \\ 596 \div 149 &= 4 \rightarrow \text{整除} \\ \therefore (6109, 5513) &= 149 \end{aligned}$$



1.16 因数拓展

我的笔记

已知 N , 对 N 分解素因数:

$$N = a_1^{p_1} \cdot a_2^{p_2} \cdots a_n^{p_n} (a_1, a_2, \dots, a_n \text{ 为 } N \text{ 的素因数})$$

1. N 的因数个数:

$$D(N) = (p_1 + 1) \cdot (p_2 + 1) \cdot (p_3 + 1) \cdots (p_n + 1)$$

2. N 的所有的因数和:

$$S(N) = (a_1^0 + a_1^1 + a_1^2 + \cdots + a_1^{p_1}) \cdot (a_2^0 + a_2^1 + a_2^2 + \cdots + a_2^{p_2}) \cdots (a_n^0 + a_n^1 + a_n^2 + \cdots + a_n^{p_n})$$

[拓]

3. N 的因数倒数和: $S'(N) = \frac{S(N)}{N}$

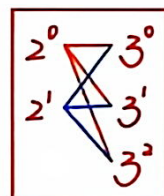
4. N 的因数积: $T(N) = N^{\frac{D(N)}{2}}$

例 $18 = 2 \times 3^2$, 因数: 1, 2, 3, 6, 9, 18.

1. $D(18) = \underline{(1+1)} \cdot \underline{(2+1)} = 6$

2 的次方: 2^0 与 2^1 共两个

3 的次方: 3^0 与 3^1 与 3^2 共三个



2. $S(18) = 1 + 2 + 3 + 6 + 9 + 18$

$$= 2^0 \times 3^0 + 2^1 \times 3^0 + 2^0 \times 3^1 + 2^1 \times 3^1 + 2^0 \times 3^2 + 2^1 \times 3^2$$

$$= 2^0 \times (3^0 + 3^1 + 3^2) + 2^1 \times (3^0 + 3^1 + 3^2)$$

$$= (2^0 + 2^1) \cdot (3^0 + 3^1 + 3^2)$$

$$= 39$$

1.17 分数的最大公因数与最小公倍数



我的笔记

最简分数的最大公因数 $(\frac{b}{a}, \frac{d}{c}) = \frac{(b,d)}{[a,c]}$.

证明: 令 $(\frac{b}{a}, \frac{d}{c}) = \frac{n}{m}$, $(m,n)=1$,

则 $\frac{b}{a} \div \frac{n}{m} = \frac{bm}{an}$ 为整,

$\therefore n|b, a|m$.

且 $\frac{d}{c} \div \frac{n}{m} = \frac{dm}{cn}$ 为整,

$\therefore n|d, c|m$,

$\therefore n|(b,d), [a,c]|m$,

$\therefore n_{\max}=(b,d), m_{\min}=[a,c]$,

最简分数的最小公倍数 $[\frac{b}{a}, \frac{d}{c}] = \frac{[b,d]}{(a,c)}$.

证明: 令 $[\frac{b}{a}, \frac{d}{c}] = \frac{q}{p}$, $(p,q)=1$,

则 $\frac{q}{p} \div \frac{b}{a} = \frac{qa}{pb}$ 为整,

$\therefore b|q, p|a$,

且 $\frac{q}{p} \div \frac{d}{c} = \frac{qc}{pd}$ 为整,

$\therefore d|q, p|c$,

$\therefore [b,d]|q, p|(a,c)$,

$\therefore q_{\min}=[b,d], p_{\max}=(a,c)$.

